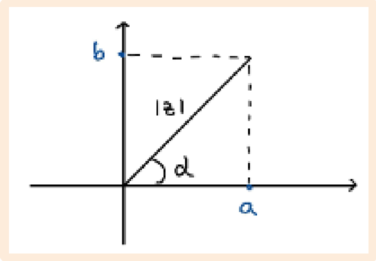
NUMERI REALI E COMPLESSI

$\mathbb{R}$

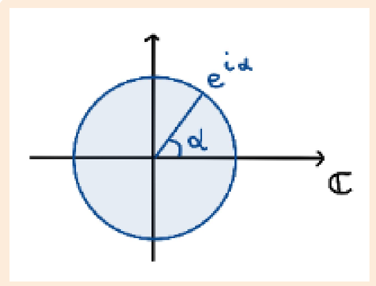
- È un campo ORDINATO, COMPLETO e ARCHIMEDEO
  - ORDINATO
    - C'è una relazione d'ordine (totale) sull'insieme
  - COMPLETO
    - Esiste un elemento separatore e esiste un estremo superiore
      - $\forall A,B\subseteq\mathbb{R}$ non vuoti se vale $x\le y$ $\forall x\in A$ e $\forall y\in B$ allora $\exists z\in\mathbb{R}$ tc $x\le z\le y$ $\forall x\in A$ e $\forall x\in B$
      - $A\subseteq\mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato $\Rightarrow \exists \sup A\in\mathbb{R}$
        - x è un maggiorante per A se $x\ge y$ $\forall y\in A$
        - Il più piccolo dei maggioranti si chiama estremo superiore di A ($\sup A\in\mathbb{R}$)
    - Tutte le successioni di Cauchy convergono
      - vedi approfondimento
  - ARCHIMEDEO
    - $\forall x,y\in\mathbb{R}$ tale che $0<x<y$ $\exists n\in\mathbb{N}$ tale che $n\cdot x>y$
      - Se così non fosse allora avrei $n\le y/x$ $\forall n\in\mathbb{N}$ cioè $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ avrebbero un maggiorante in $\mathbb{R}$: assurdo
    - Esistono campi ordinati non archimedei
      - Reali non standard
      - $\mathbb{Q}(x)$, $\mathbb{R}(x)$
      - Numeri surreali
- $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ (Una conseguenza di questa proprietà)
  - cioè $\forall x,y\in\mathbb{R}$ con $x<y$ $\exists z\in\mathbb{Q}$ tale che $x<z<y$
    - $y-x>0$, prendo $n\in\mathbb{N}$ tale che $n(y-x)>1$ e supponiamo $x>0$. Sia $k=\max\{j\in\mathbb{N} \mid j/n\le x\} \Rightarrow k/n\le x<(k+1)/n\le x+(1/n)\cdot k$
- I numeri reali esistono e sono unici a meno di isomorfismo
  - Li costruiamo con le sezioni di Dedekind
    - Una sezione di Dedekind di $\mathbb{Q}$ è una partizione di $\mathbb{Q}=A\cup B$ tale che $A\neq\varnothing$ e $B\neq\varnothing$ e $x<y$ $\forall x\in A$ e $y\in B$ (semirette disgiunte)
    - Prendo le sezioni per cui non c'è massimo in A. Voglio dare una struttura di campo ordinato su A e B.
      - Dato $q\in\mathbb{Q}$ corrisponde alla sezione $A=\{x\in\mathbb{Q} \mid x<q\}$, $B=\{x\in\mathbb{Q} \mid x>q\}$
        - $\mathbb{Q}$ è in bigezione con le sezioni
    - Possiamo definire un ordine totale sulle sezioni: $(A,B)\le(A',B') \Leftrightarrow A\subset A'$ e possiamo estendere le operazioni a tutte le sezioni
      - Il campo che ne risulta è unione di sezioni, che è sempre una sezione, ed è proprio $\mathbb{R}$
- $|\mathbb{R}|=|\mathscr{P}(\mathbb{N})|=2^{\mathbb{N}}$
  - $\mathbb{R} \longleftrightarrow \{(A,B)$ sezioni di Dedekind senza massimo di A$\}$ che si immergono iniettivamente in $\mathscr{P}(\mathbb{Q})\longleftrightarrow\mathscr{P}(\mathbb{N})$
    - $|\mathbb{R}|\le|\mathscr{P}(\mathbb{N})|$
  - Trovo una funzione iniettiva $g:\mathscr{P}(\mathbb{N})\to\mathbb{R}$. Identifico $\mathscr{P}(\mathbb{N})=\{f:\mathbb{N}\to\{0,2\}\}$ e definisco $g(f)=0,f(1)f(2)f(3)\ldots$ che sarà del tipo $0,20220\ldots$ e lo leggo in base 3 così che $\in\mathbb{R}$ e si verifica che g è iniettiva
    - $|\mathbb{R}|\ge|\mathscr{P}(\mathbb{N})|$
  - Tramite la diagonale di Cantor si dimostra che la cardinalità del continuo (cioè $|\mathbb{R}|$) è più che numerabile

$\mathbb{C}$

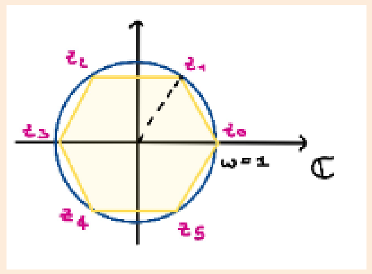
- $x^2=-1$ non ha senso in $\mathbb{R}$, allora introduciamo un'unità immaginaria i tale che $i^2=-1$
  - i genera il campo dei numeri complessi, $\mathbb{C}=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R}\}$
- OPERAZIONI
  - $(a+ib)+(c+id)=(a+c)=i(b+d)$
    - $\mathbb{C}$ è un gruppo abeliano rispetto a +
      - $\mathbb{C}$ è un campo che estende $\mathbb{R}$
  - $(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+(ad+bc)\cdot i$
    - $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ è un gruppo rispetto a $\cdot$
      - Dato $(a+ib)$ il numero $(a-ib)/(a^2+b^2)$ è il suo inverso per $\cdot$
- ELEMENTI
  - Dato $z\in\mathbb{C}$, $z=a+ib$
    - $a=Re(z)$ la PARTE REALE
    - $b=Im(z)$ la PARTE IMMAGINARIA
    - $\overline{z}=a-ib$ CONIUGATO DI z
    - $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ MODULO DI z
      - $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$
      - $|z\cdot\omega|=|z|\cdot|\omega|$
      - $|z+\omega|\le|z|+|\omega|$
      - $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$
      - $1/z=\overline{z}/|z|^2$
- Si può definire un ordine totale (non completo)
  - $a+ib\le c+id$ se $a<c$ o $a=c$ e $b\le d$
- RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA



  - $\alpha=\arctan(z)$
    - È definito a meno di multipli di 2π
    - Si dice argomento principale di z
  - $b=|z|\cdot\sin\alpha$
  - $a=|z|\cdot\cos\alpha$
  - $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$
  - PROPRIETÀ
    - $z_1=\rho_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$ con $\rho_1=|z_1|$ e $\alpha_1=Arg(z_1)$
      $z_2=\rho_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)$ con $\rho_2=|z_2|$ e $\alpha_2=Arg(z_2)$
      $z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot\rho_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$
    - $z=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$
      $z^n=\rho^n(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha))$ $\forall n\in\mathbb{N}$
      $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)$
- RAPPRESENTAZIONE ESPONENZIALE



  - Poniamo $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $z=\rho e^{i\alpha}$
  - $e^{i\alpha}:\mathbb{R}\to\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$
  - $z=a+ib\in\mathbb{C}$, $e^{\wedge}z=e^a e^{ib}=e^a(\cos b+i\sin b)$
  - $e^{\wedge}z:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ è un isomorfismo di gruppi
- RADICI n-ESIME
  - Cerchiamo le soluzioni in $\mathbb{C}$ di $z^n=\omega$
    - $\omega=|\omega|e^{ia}$, $z=|z|e^{ib}$, $z^n=|z|^n e^{inb}$, $\alpha=\arg(\omega)$
    - $|z|^n e^{in\beta}=|\omega|e^{i[Arg(\omega)+2k\pi]}$ $\quad k\in\mathbb{Z}$
      $$\Rightarrow\begin{cases}|z|=|\omega|^{\frac{1}{n}}\\ Arg(z)=\dfrac{Arg(\omega)}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}\end{cases}\quad \text{tc } Arg(z)\in[0,2\pi)$$
      n soluzioni distinte
- RADICI DELL'UNITÀ



  - $z^n=1 \Rightarrow$ Poligono inscritto nella circonferenza unitaria
  - Esiste sempre una soluzione di $P(z)=0$
- $\mathbb{C}$ è un campo algebricamente chiuso (Teorema fondamentale dell'algebra)